２０１７年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　７月５日

復習問題１．　実ベクトル空間上の対称双線形形式あるいは２次形式の定義を述べよ。対称双線形形式あるいは２次形式の符号の定義を述べよ。

復習問題２． (1) C^∞ 級写像 $c : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を曲線と呼ぶ。曲線の長さの定義は何か？
(2) $\mathbf{R}^n$ の２点 $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$ に対し、$c(0) = \mathbf{x}^0$, $c(1) = \mathbf{x}^1$ となる曲線の中で長さが最小のものは、$\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$ を結ぶ線分であることを示せ。
(3) $c(0) = \mathbf{x}^0$, $c(1) = \mathbf{x}^1$ となる曲線に対し、$A(c) = \displaystyle\int_0^1 \|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\|^2 \mathrm{d}t$ とおく。$A(c)$ が最小となる $c(t)$ は、$c(t) = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)$ となることを示せ。

演習問題１． ３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の $(0,0,-R)$ を中心とする半径 R の球面を $S_R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+(z+R)^2 = R^2\}$ とする。このとき $p : S_R \setminus \{(0,0,-2R)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を $(0,0,-2R)$, $\mathbf{x}$, $(p(\mathbf{x}),0)$ が同一直線上にあることで定義する。$\mathbf{R}^2$ 上の曲線 $c(t) = (\xi(t),\eta(t))$ $(t \in [0,1])$ に対し、$p^{-1} \circ c : [0,1] \longrightarrow S_R$ の長さを書き表せ。

演習問題２． ３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の単位球面を $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とする。S^2 上の２点を結ぶ S^2 上の曲線で長さが最小のものは、原点を通る平面と S^2 の交わり（大円）上の弧であることを示せ。
ヒント：１点を通る大円の族、１点を中心とする小円の族を考える。

演習問題３． n 次元コンパクト多様体上には、リーマン計量が存在することを示せ。
ヒント：正値対称行列の全体は凸である。座標近傍による有限被覆とそれに従属した１の分割を使う。

演習問題４．　F をコンパクト多様体 M の微分同相写像からなる有限群とする。M 上のリーマン計量 g で F の任意の元 f について $f^*g = g$ を満たすものがあることを示せ。
ヒント：１つのリーマン計量を取り、有限群の作用で移りあう点でのリーマン計量を平均する。

演習問題５．　n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ が $f^{-1}(0)$ 上で $Df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ をみたすとする。このとき $M = f^{-1}(0)$ は、$n-1$ 次元多様体となる。曲線 $\overrightarrow{x} : \mathbf{R} \longrightarrow M$ の２階微分が、$\mathrm{grad}(f)$ の方向にある、すなわち、$\mathbf{R}$ 上の関数 a に対して、次が成立しているとする。

$$\Big(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t^2}\Big)_{(t)} = a(t)(\mathrm{grad}(f))_{(\overrightarrow{x}(t))}$$

(1) $\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\|^2$ は t によらず不変であることを示せ。
(2) このような $a(t)$ を求めよ。（$a(t)$ は $\overrightarrow{x}(t)$, $\Big(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\Big)_{(t)}$ の関数となることを確かめよ。）
(3) 上の微分方程式は、M に誘導されたリーマン計量についての測地線の方程式と一致することを確かめよ。