２０１７年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　７月１２日

復習問題１． $\mathbf{R}^2$ 上の次で定義される同値関係を考える。

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbf{Z}^2,\ (x_1 + m, y_1 + n) = (x_2, y_2)$$

この同値関係による商空間を $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ と書く。

(1)　$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ はハウスドルフ空間であることを示せ。

(2)　$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ は２次元多様体であることを示せ。

(3)　A を２行２列の整係数行列とするとき、線形写像 $A : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ は微分可能な写像 $F_A : \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ を定義することを示せ。

(4)　$\mathrm{rank}(F_A)_*$ を求めよ。

復習問題２． M, N をコンパクト多様体とする。C^∞ 級写像 $f : M \longrightarrow N$ について, M 上のベクトル場 ξ, N 上のベクトル場 η が、すべての $x \in M$ に対し、$f_*(\xi(x)) = \eta(f(x))$ を満たすとする。（ $f_*\xi = \eta$ とも書かれ、M 上のベクトル場 ξ が、N 上のベクトル場 η に射影されるという。）ξ が生成するフローを $\varphi_t : M \longrightarrow M$, η が生成するフローを $\psi_t : N \longrightarrow N$ とするとき次を示せ。

$$f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$$

復習問題３． m 次元コンパクト多様体 M 上のフロー $\varphi_t(x)$ が、ベクトル場 ξ で生成されているとする。M の $m-1$ 次元コンパクト部分多様体 N に対し、$x \in N$ に対して、$\xi(x) \notin T_xN$ とする。このとき、正実数 ε で、写像 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times N \ni (t, x) \longmapsto \varphi_t(x) \in M$ が M の開集合への埋め込みとなるようなものが存在することを示せ。

演習問題１． コンパクトリーマン多様体 (M, g) 上の関数 f について、任意の接ベクトル X に対し、$g(\mathrm{grad}(f), X) = Xf$ となるベクトル場 $\mathrm{grad}(f)$ を考える。

(1)　ベクトル場 $\xi = \dfrac{1}{g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f))}\mathrm{grad}(f)$ の生成するフロー φ_t が定義されている点で、$f(\varphi_t(x)) = f(x) + t$ となることを示せ。
ヒント：$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ について、$f_*\xi = \dfrac{\partial}{\partial t}$ を示すと、復習問題２が使える。

(2)　M 上のモース関数 f の２つの正則値 t_0, t_1 $(t_0 < t_1)$ の間に臨界値が存在しないと仮定する。$f^{-1}([t_0, t_1])$ は $[t_0, t_1] \times f^{-1}(t_0)$ と微分同相であることを示せ。
（境界のある多様体の微分同相とはこの場合、ε に対し、$f^{-1}((t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon))$ は $(t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times f^{-1}(t_0)$ と微分同相であり、その制限になっているということ。）

演習問題２． (1) n 次元ユークリッド空間上の線型ベクトル場 $X=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して、$[X,Y]$ を求めよ。

(2) X が生成するフロー φ_t について、$(\varphi_t)_*Y$ を書き下し、$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\big((\varphi_t)_*Y\big)$ を求めよ。但し、$(\varphi_t)_*Y$ はベクトル場 Y を微分同相 φ_t で写したもので、
$((\varphi_t)_*Y)(x)=(\varphi_t)_*(Y(\varphi_{-t}(x)))$ により定義される。

演習問題３． コンパクトリーマン多様体 M について、$X\in T_xM$ に対し、$\gamma_X(t)$ を $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=X$ となる測地線とする。

(1) $E:T_xM\longrightarrow M$ を $E(X)=\gamma_X(1)$ で定義すると、E は T_xM の 0 の近傍から、M の x の近傍への微分同相写像となることを示せ。

(2) 写像 $F:TM\longrightarrow M\times M$ を $X\in T_xM\subset TM$ に対し、$F(X)=(x,E(X))$ で定義する。F は TM の zero section の近傍から $M\times M$ の $\Delta=\{(x,x)\bigm| x\in M\}\subset M\times M$ の近傍への微分同相写像となることを示せ。

演習問題４． $m>n$ とする。M,N を m 次元, n 次元コンパクト連結 C^∞ 多様体とする。C^∞ 級写像 $F:M\longrightarrow N$ を、M の任意の点 x で、接写像 $F_*:T_xM\longrightarrow T_{F(x)}N$ が全射であるものとする。このとき、N の任意の点 y に対し、次のような近傍 U_y が存在することを示せ。微分同相写像 $h:F^{-1}(U_y)\longrightarrow U_y\times F^{-1}(y)$ で $F=\mathrm{pr}_1\circ h$ を満たすものが存在する。（ファイブレーション定理）

ヒント：M にリーマン計量を入れ、$L=F^{-1}(y)$ の法束 $\nu(L)=\{v\in T_x(M)\bigm|x\in L, g(v,w)=0 \text{ for } w\in T_xL\}\subset TM$ から、M へのエクスポネンシャル・マップが、$\nu(L)$ の L の近傍から、$F^{-1}(y)$ の近傍への微分同相となることを見る。$F^{-1}(y)$ の近傍から、$F^{-1}(y)$ への射影 p が定義される。$h=(F,p)$ で定義する。

演習問題５． G をリー群（多様体であり、群の演算が C^∞ 級であるもの）とする。

(1) G 上のベクトル場で任意の $g\in G$ に対し、$(L_g)_*\xi=\xi$ をみたすものを、左不変ベクトル場という。G 上の左不変ベクトル場全体 $\mathfrak{g}$ は $\dim G$ 次元のベクトル空間をなすことを示せ。($\mathfrak{g}$ を G のリー環と呼ぶ。)

(2) ξ,η を左不変ベクトル場とするとき、$[\xi,\eta]$ も左不変ベクトル場であることを示せ。

(3) $\mathbf{1}$ を G の単位元とする。左不変ベクトル場 ξ が生成する 1 パラメーター変換群を φ_t と書くとき、任意の $g\in G$ に対し、$\varphi_t(g)=g\varphi_t(\mathbf{1})$ を示せ。($\varphi_t(\mathbf{1})=\exp(t\xi)$ と書く。)

(4) ξ に対し、$\exp(\xi)$ を対応させる写像は、$\mathfrak{g}$ の 0 の近傍から G の $\mathbf{1}$ の近傍への微分同相写像であることを示せ。
(逆関数定理を使う。)