２０１７年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月２６日

復習問題１． 関数 $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, 写像 $F : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ に対しての陰関数定理を述べよ。

復習問題２． 写像 $f : \boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が C^r 級であることの定義を述べよ。

復習問題３． $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y$ について、$Df = \big(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\big) = (0,0)$ となる点 (x,y) を求めよ。$f(x,y)$ はその点で極大であるか、極小であるか判定せよ。

演習問題１． $f : \boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$, $g : \boldsymbol{R}^\ell \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ を C^∞ 級の写像とするとき、$f \circ g : \boldsymbol{R}^\ell \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ は C^∞ 級の写像であることを示せ。
ヒント：C^{r-1} 級の写像の和、積は C^{r-1} 級。f が C^r 級写像ならば、Df は C^{r-1} 級。チェインルールを使う。

演習問題２． $\boldsymbol{R}^3$ の次の部分集合が滑らかな曲面であるかどうか論ぜよ。

$$C = \big\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 = z^2\big\}$$

$$X = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} z^2 = -\{x^2+y^2-1\}\{(x+3)^2+y^2-1\}\cdot \\ \{(x-3)^2+y^2-1\}\{x^2+y^2-25\} \end{array}\right\}$$

$$Y = \big\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\big|\; z^2 = -\{(x+1)^2+y^2-1\}\{(x-1)^2+y^2-1\}\big\}$$

但し、$\boldsymbol{R}^n$ の滑らかな曲面 S とは、S の各点 x に対し、x の近傍 V と C^∞ 級写像 $f : V \longrightarrow \boldsymbol{R}^{n-2}$ で、V 上で $\mathrm{rank} Df = n-2$, $V \cap S = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（２次元部分多様体であること）

演習問題３． $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面 $z = x^3 + xy$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。この接平面が x 軸に平行になるような点 (x_0, y_0, z_0) はどのような図形をなすか。(x 軸を含む場合も平行になるという。) その図形の xy 平面への正射影、xz 平面への正射影、yz 平面への正射影のみたす方程式を求めよ。

演習問題４． $S^2 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \big| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\big\}$ 上の関数 f を

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

で定める。$f(x_1, x_2, x_3)$ はどのような値をとるか。実数 y に対し $f^{-1}(y)$ はどのような図形であるかを論ぜよ。