２０１７年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月２６日

復習問題１.
(1)　位相空間がコンパクトであることの定義を述べよ。
(2)　位相空間がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ。
(3)　位相空間が連結であることの定義を述べよ。
(4)　ユークリッド空間の部分集合が開集合であることの定義を述べよ。

復習問題２. コンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続な全単射 h は同相写像であることを示せ。

演習問題１. ３次元ユークリッド空間の開集合 U 上の C^∞ 級関数 $F(x, y, z)$ により、$F(x, y, z) = c$ によって定義される曲面（等位面）S_c が与えられているとする。但し、任意の c に対し、$DF \neq 0$ が S_c 上で成立しているとする。

$$S_c = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid F(x, y, z) = c\}$$

開集合 U 内の C^∞ 級空間曲線 $(a, b) \ni t \longmapsto (\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ について、その接ベクトルがすべての t_0 に対し $(\xi(t_0), \eta(t_0), \zeta(t_0))$ を通る $F(x, y, z)$ の等位面の接平面に含まれることと、空間曲線が一つの等位面 S_{c_0} に含まれることは同値であることを示せ。
ヒント：チェインルール

演習問題２. ユークリッド空間の部分集合 X が有界閉集合であることとコンパクトであることは同値であることを示せ。
ヒント：片方向きは、「距離空間のコンパクト集合は有界。ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合。」を示す。反対向きは、「ユークリッド空間の有界閉集合は点列コンパクト（任意の点列は、収束する部分列を持つ）。距離空間が点列コンパクトならば、与えられた開被覆に対しルベーグ数が存在する（正実数 $\delta > 0$ で、各点の δ 近傍は与えられた開被覆に属する開集合の部分集合となる）。距離空間が点列コンパクトならばコンパクト。」を示す。

演習問題３. $P = \boldsymbol{R}^n \times \{-1, 1\}$ 上の同値関係 $\sim_1, \sim_2$ を次で生成されるものとする。
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し、$(\boldsymbol{x}, -1) \sim_1 (\boldsymbol{x}, 1)$.
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し、$(\boldsymbol{x}, -1) \sim_2 (\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}, 1)$.
商空間 $P/\sim_1$, $P/\sim_2$ がハウスドルフ空間かどうか調べよ。