

復習問題 1. 位相空間  $X$  がハウスドルフ空間ではないとする。このとき、 $X$  の相異なる 2 つの点で、任意の  $X$  上の実数値連続関数の値が等しくなることを示せ。

復習問題 2. 集合  $X$  上の同値関係  $\sim$  とは何か。

集合  $X$  上の同値関係  $\sim$  による商空間  $X/\sim$  とは何か。

位相空間  $X$  上の同値関係  $\sim$  による商空間の商位相とは何か。

$\pi : X \rightarrow X/\sim$  を射影とすると、 $f : X/\sim \rightarrow \mathbf{R}$  について、 $F = f \circ \pi : X \rightarrow \mathbf{R}$  が連続ならば、 $f : X/\sim \rightarrow \mathbf{R}$  は連続であることを示せ。

演習問題 1.  $xy$  平面から原点を除いた位相空間を  $Z$  とする。

(1)  $Z$  の  $x$  軸に平行な直線の連結成分のなす空間を  $Y$  とする。 $Y$  の各点  $y$  に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間  $Y$  はハウスドルフでないことを示せ。

(2)  $Z$  上の関数  $f(x, y) = xy$  の等位線の連結成分のなす空間を  $X$  とする。 $X$  の各点  $x$  に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間  $X$  はハウスドルフでないことを示せ。

演習問題 2. (1)  $\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{R}^\times$  はハウスドルフ空間であることを示せ。

(ヒント :  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$  に対し、 $f_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \mapsto \frac{|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$  を考え、2 点は関数で分離できることを示す。但し  $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$  は内積を表す。シュワルツの不等式に注意する。)

(2)  $\mathbf{R}P^n$  は  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体であることを示せ。

演習問題 3. (1)  $\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$  はハウスドルフ空間であることを示せ。

(ヒント :  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$  に対し、 $f_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \mapsto \frac{|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$  を考え、2 点は関数で分離できることを示す。但し  $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$  はエルミート内積を表す。シュワルツの不等式に注意する。)

(2)  $\mathbf{C}P^n$  は  $2n$  次元  $C^\infty$  多様体であることを示せ。

演習問題 4.  $X, Y$  をハウスドルフ空間、 $A \subset X, B \subset Y$  をコンパクト部分空間、 $f : A \rightarrow B$  を同相写像として、 $X \sqcup Y$  における同値関係  $\sim$  を、

$$u \sim v \iff (u = v) \text{ or } (u \in A, v \in B, f(u) = v) \text{ or } (u \in B, v \in A, f(v) = u)$$

で定義する。 $Z = (X \sqcup Y)/\sim$  はハウスドルフ空間であることを示せ。