

復習問題 1. X, Y を実ベクトル空間とする。

- (1) 実ベクトル空間の次元の定義を述べよ。
- (2) 線形写像 $X \rightarrow Y$ の階数 (rank) の定義を述べよ。

復習問題 2. 実ベクトル空間 X の部分空間 Y, Z に対し、

$\forall v \in X, \exists v_Y \in Y, v_Z \in Z, v = v_Y + v_Z$ が成立しているとする。

このとき、 $\dim X, \dim Y, \dim Z, \dim Y \cap Z$ の関係を述べよ。

演習問題 1. 位相空間 E, B の間に連続写像 $p: E \rightarrow B$ があって、次の条件を満たすとする。ある位相空間 F があって、 B の各点 b に対し、 b の開近傍 U_b を選べば、同相写像 $h: p^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times F$ で、 $\text{pr}_1 \circ h = p$ を満たすものが存在する。ここで pr_1 は第 1 成分への射影 $U_b \times F \rightarrow U_b$ である。

B, F がハウスドルフ空間であると仮定すると、 E もハウスドルフ空間となることを示せ。

演習問題 2. n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ について、座標変換 $g_{ij}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ は $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j|_{U_i \cap U_j})^{-1}$ で定義される。

- (1) $\varphi_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ 上で、 $g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすことを示せ。

$V_i = \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$ と置く。 g_{ii} は V_i の恒等写像 id_{V_i} とする。また $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$, $V_{ji} = \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ とおくと、 $g_{ij}: V_{ij} \rightarrow V_{ji}$ は \mathbf{R}^n の開集合の間の微分同相写像である。(1) の関係式は、 $V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{jk}} V_{ij} \cap V_{kj} \xrightarrow{g_{ij}} V_{ji} \cap V_{ki}$ の結合が $V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{ik}} V_{ji} \cap V_{ki}$ に等しいというものである。さらに $V_{ii} = V_i$ と置くと、 i, j, k のうちの 2 つが等しい場合にも成立している。

- (2) 一般に V_i を \mathbf{R}^n の開集合とする。 $\{V_i\}_{i \in I}$ の disjoint union $\bigsqcup_{i \in I} V_i$ の定義を述べよ。

$V_i \subset \mathbf{R}^n, V_{ji} \subset V_i = V_{ii}$ を開集合、 $g_{ij}: V_{ij} \rightarrow V_{ji}$ を C^∞ 級写像で、 $g_{ii} = \text{id}_{V_i}$, $g_{jk}(V_{ik} \cap V_{jk}) = V_{ij} \cap V_{kj}$ かつ $V_{ik} \cap V_{jk}$ 上で、 $g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすとする。

- (3) $\bigsqcup_{i \in I} V_i$ 上の、次の関係 \sim は同値関係であることを示せ。

$x_i \in V_i, x_j \in V_j$ に対し、 $x_i \sim x_j \iff x_j \in V_{ij} \subset V_j$ かつ $x_i = g_{ij}(x_j)$

- (4) $X = (\bigsqcup_{i \in I} V_i) / \sim$ を商空間とする。 X がハウスドルフ空間であると仮定すると、 X は n 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ。

(5) n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ から最初に定義した V_i, V_{ij} について、上で構成した X は M と微分同相であることを示せ。

注意. 5月10日の演習問題4において、 $A \subset X, B \subset Y$ の仮定は、閉部分空間で良い。