２０１７年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月２４日

復習問題１． (1) $n \geqq 0$ を整数とするとき、$\lim_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ を示せ。
($y > 0$ のとき、$e^y > \dfrac{y^n}{n!}$ を使っても良い。)
(2) 連続関数 $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ が、$(0, \infty)$ で微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が $(0, \infty)$ で連続とする。$\lim_{x\searrow 0} f'(x)$ が存在するならば、$\lim_{x\searrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ は存在し、$\lim_{x\searrow 0} f'(x)$ に等しいことを示せ。　（平均値の定理）
(3) 関数 $\rho : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$ で定義すると、ρ は C^∞ 級であることを示せ。（ρ の m 回微分した式の形が (1) の形の式の 1 次結合となることを示す。）

復習問題２． コンパクトハウスドルフ空間 X は正規空間であることを示せ。
すなわち、$A_1,\, A_2$ を X の閉集合、$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ とするとき、開集合 $U_1,\, U_2$ で、$A_1 \subset U_1,\, A_2 \subset U_2,\, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在することを示せ。

復習問題３． コンパクトハウスドルフ空間 X の開被覆 $\{U_i\}$ に対し、X の開被覆 $\{V_i\}$ で、$\overline{V}_i \subset U_i$ となるものが存在することを示せ。

演習問題１． $GL(n; \mathbf{R})$ は、n^2 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。$SL(n; \mathbf{R})$ は、$GL(n; \mathbf{R})$ の $n^2 - 1$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ。
ヒント：陰関数定理。det の微分が $\det = 1$ の点で 0 でないことを、行列式の行あるいは列による展開を用いて示す。

演習問題２． $O(n) = \{A \in M(n; \mathbf{R}) \,\big|\, {}^tAA = I\}$ は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次元 C^∞ 級多様体であることをしめせ.
ヒント：陰関数定理。 $A \longmapsto {}^tAA$ の A における微分が線形写像 $X \longmapsto {}^tXA + {}^tAX$ となること、この線形写像は、$X \longmapsto {}^tAX,\, Y \longmapsto {}^tY + Y$ を結合したもので、ランクがわかる。($U(n)$ についても同様。)

演習問題３． 複素射影直線 $\mathbf{C}P^1 = (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ と、（２次元）球面
$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ は微分同相であることを示せ。
ヒント：S^2 について、$(0, 0, 1)$ からの stereographic projection p_+ および $(0, 0, -1)$ からの stereographic projection p_- により、座標近傍系を定義する。
ただし、$p_\pm : S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ は $(0, 0, \pm 1),\, \mathbf{x},\, (p_\pm(\mathbf{x}), 0)$ が同一直線上にあることにより定義される。
(*)　(暇な時に考える問題) stereographic projection は S^2 上の円を $\mathbf{R}^2$ の円または直線に写すことを示せ。