２０１７年度幾何学特別演習 I 演習問題　　５月３１日

復習問題１． ユークリッド空間上の C^∞ 級関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ に対し、次を満たす C^∞ 級関数 $g_1(x_1,\ldots,x_n)$, …, $g_n(x_1,\ldots,x_n)$ が存在することを示せ。
$f(x_1,\ldots,x_n)=f(0,\ldots,0)+x_1g_1(x_1,\ldots,x_n)+\cdots+x_ng_n(x_1,\ldots,x_n)$
(このとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(0,\ldots,0)=g_k(0,\ldots,0)$ となる。)
ヒント：$f(x_1,\ldots,x_n)-f(0,\ldots,0)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(tx_1,\ldots,tx_n)}{\mathrm{d}t}\mathrm{dt}$

復習問題２． $f:M\longrightarrow\mathbf{R}$ を n 次元コンパクト C^∞ 級多様体上の C^∞ 級関数とする。$f_*:T_xM\longrightarrow\mathbf{R}$ について $f_*=0$ を満たす M の点 x が、少なくとも２点存在することを示せ。
ヒント：コンパクト位相空間上の連続関数は最大値、最小値をもつ。

演習問題１． G は群であり、n 次元 C^∞ 級多様体でもあるとする。群の演算 $G\times G\longrightarrow G$ が C^∞ 級写像であると仮定する。
(1). $G\ni h\longmapsto gh\in G$ を L_g と書くと、L_g は C^∞ 級微分同相であることを示せ。
(2). 群の演算 $G\times G\longrightarrow G$ の接写像 $T_{(g,h)}(G\times G)\longrightarrow T_{gh}G$ のランクを求めよ。
ヒント：c_g を g に値をとる定値写像とし、$G\xrightarrow{(c_g,L_h)}g\times G\subset G\times G\xrightarrow{\text{演算}}G\xrightarrow{L_{(gh)^{-1}}}G$ の接写像のランクを考える。
(3). 群の逆元をとる演算 $G\longrightarrow G$ は C^∞ 級であることを示せ。

演習問題２． C^∞ 級多様体 X の部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとは, すべての $x\in Y\cap Z$ について $T_xY+T_xZ=T_xX$ が成立することである。
X のコンパクト部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとき, $Y\cap Z$ も X のコンパクト部分多様体になることを示せ.
ヒント：$x_0\in Y\cap Z$ の近傍 U には、コンパクト部分多様体 Y, Z を定義する C^∞ 級写像 $U\longrightarrow\mathbf{R}^{\dim X-\dim Y}$, $U\longrightarrow\mathbf{R}^{\dim X-\dim Z}$ がある。

演習問題３． n 次元 C^∞ 級多様体 M の p における方向微分とは多様体 M 上の滑らかな関数のなす実ベクトル空間 $C^\infty(M)$ 上の線形形式 D で、
$D(f\cdot g)=Df\cdot g(p)+f(p)\cdot Dg$ を満たすものである。
(1). p における方向微分の全体 $\mathcal{D}_p$ は実ベクトル空間をなすことを示せ。
(2). M 上の曲線 $c(t)$ で $c(0)=p$ となるものに対して、$C^\infty(M)\ni f\longmapsto D_c(f)=\dfrac{\mathrm{d}(f\circ c)}{\mathrm{d}t}(0)$ とおくと、D_c は p における方向微分であることを示せ。
(3). p のまわりの座標近傍 $(U,\varphi)=(U,(x_1,\ldots,x_n))$ に対し、曲線
$t\longmapsto\varphi^{-1}(0,\ldots,0,t,0,\ldots,0)$ (k 番目の座標) に対する方向微分を $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ と書くとき、
$\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\}$ が $\mathcal{D}_p$ の基底となることを示せ。
ヒント：復習問題１。