２０１７年度幾何学特別演習 I 演習問題　　６月７日

復習問題. 多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ をとり、$V_i = \varphi_{U_i}$, $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ とする。直和 $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \boldsymbol{R}^n)$ 上の、関係 $\sim$ を

$$V_{ji} \times \boldsymbol{R}^n \ni (x_i, v_i) \sim (x_j, v_j) \in V_{ij} \times \boldsymbol{R}^n \Longleftrightarrow x_i = g_{ij}(x_j), v_i = (Dg_{ij})_{(x)} v_j$$

と定義する。

(1) 写像 $G_{ij} : V_{ji} \times \boldsymbol{R}^n \longrightarrow V_{ij} \times \boldsymbol{R}^n$ を $G_{ij}(x_j, v_j) = (g_{ij}(x_j), (Dg_{ij})_{(x_j)} v_j)$ で定義すると、これは微分同相写像であり、$G_{ii} = \mathrm{id}_{V_i \times \boldsymbol{R}^n}$ とすると、$({g_{jk}}^{-1}(V_{ij}) \cap V_{jk}) \times \boldsymbol{R}^n$ 上で、$G_{ij} \circ G_{jk} = G_{ik}$ を満たすことを示せ。

(2) $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \boldsymbol{R}^n)$ 上の関係 $\sim$ は同値関係であり、$TM = \displaystyle\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \boldsymbol{R}^n)/\!\sim$ は $2n$ 次元多様体となることを示せ。

(3) M がユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ 内の多様体であるとき、$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R}^N \mid \boldsymbol{x} \in M, \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}M\}$ はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R}^N$ の中の多様体となることを示せ。

(4) $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R}^N \mid \boldsymbol{x} \in M, \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}M\}$ は TM と微分同相であることを示せ。

演習問題１． $(a, b, c) \in \boldsymbol{R}^3$ は $(0, 0, 0)$ ではないとする．$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (2 + \cos y)(a \cos x + b \sin x) + c \sin y$$

は，$\boldsymbol{R}^2/(2\pi\boldsymbol{Z})^2$ 上の関数 $F : \boldsymbol{R}^2/(2\pi\boldsymbol{Z})^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を定義する．F の臨界点の個数が有限個であるための条件を述べよ．また，臨界点におけるヘッセ行列が退化するかどうか調べよ．

演習問題２． M をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ に埋め込まれた p 次元コンパクト多様体とする．

(1)　次で定義される $X = \nu M$ は N 次元 C^∞ 多様体であることを示せ．

$$X = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^{2N} \mid \boldsymbol{x} \in M,\ \boldsymbol{y} \perp T_{\boldsymbol{x}}M\}$$

(2)　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ で定義される写像 $e : X \longrightarrow \boldsymbol{R}^N$ は $X \cap (\boldsymbol{R}^N \times \{0\})$ の近傍では微分同相写像になっていることを示せ．

(3)　$i : M \longrightarrow \boldsymbol{R}^N$ を包含写像，$\mathrm{pr}_2 : \boldsymbol{R}^N \times \boldsymbol{R}^N \longrightarrow \boldsymbol{R}^N$ を第２成分への射影，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^N$ に対し，$L : \boldsymbol{R}^N \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を線形形式 $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{x}$ とする．このとき，次を示せ．

- $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^N$ が $\mathrm{pr}_2 | X : X \longrightarrow \boldsymbol{R}^N$ の正則点であることと $L \circ i : M \longrightarrow \boldsymbol{R}$ がモース関数であることは同値である．