

復習問題 1. (1) 平面上あるいは空間上の正規形の 1 階常微分方程式とは何か。
 (2) 平面上あるいは空間上の正規形の 1 階常微分方程式の解の存在と一意性の定理を述べよ。

復習問題 2. 次の常微分方程式を解け。但し、初期値は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とする。

$$(1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

演習問題 1. コンパクト多様体 M 上のフロー φ_t を考える。

- (1) 1 点 $x_0 \in M$ に対し、 $\varphi_t(x_0)$ が t について定値写像ではないとする。このとき、ある実数 $T (T \geq 0)$ が存在し、「 $\varphi_{t_1}(x_0) = \varphi_{t_2}(x_0)$ ならば、整数 n があって、 $t_2 - t_1 = nT$ となる」ことを示せ。
 (2) 1 点 $x_0 \in M$ に対し、 $\varphi_t(x_0)$ を考える。 M の点 y で、 y の任意の近傍 $U_y \subset M$ に対し、 $\sup\{t \in \mathbf{R} \mid \varphi_t(x_0) \in U_y\} = +\infty$ となるものが存在することを示せ。

演習問題 2. n 次元実ベクトル空間の開集合 U 上の常微分方程式 $\frac{d}{dt} \mathbf{x} = F(t, \mathbf{x})$ に対し、

$$F(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \text{ が } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ について } (t \text{ に対して一様に}) \text{ リプシッツであるとし、}$$

このような常微分方程式の解の存在と一意性、解の初期値やパラメータに対する連続性はわかっているとす。

さらに、 $F(t, \mathbf{x})$ は \mathbf{x} について、 C^1 級であるとする。このとき、 $t = t_0$ において初期値 \mathbf{x}^0 を

$$\text{持つ解 } \Phi(t, \mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, \mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \varphi_n(t, \mathbf{x}^0) \end{pmatrix} \text{ は、初期値 } \mathbf{x}^0 \text{ について } C^1 \text{ 級で、} A_{ij}(t, \mathbf{x}^0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j^0}(t, \mathbf{x}^0)$$

は $\frac{d}{dt} A_{ij}(t, \mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, \Phi(t, \mathbf{x}^0)) A_{kj}(t, \mathbf{x}^0)$ を満たすことを示せ。

ヒント : $F(t, \mathbf{x} + \mathbf{v}) - F(t, \mathbf{x}) = \sum v_i G_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ とする連続関数 $G_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} G_{i1}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ \vdots \\ G_{in}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}$ が存在す

る (5月31日復習問題1)。さらに、 $G_i(t, \mathbf{x}, 0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}, 0)$ である。 $(s, \frac{1}{s}(\Phi(t, \mathbf{x}^0 + s\mathbf{v}) - \Phi(t, \mathbf{x}^0)))$ の満たす常微分方程式についての解の存在と一意性、解のパラメータに対する連続性を用いる。

演習問題 3. $X : (a, b) \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ が C^∞ 級とする。このとき、 $t = t_0$ において初期値

$$\mathbf{x} \text{ を持つ解 } F(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \text{ は、} C^\infty \text{ 級の写像であることを示せ。}$$