２０１７年度幾何学Ｉ・幾何学特別演習Ｉ　試験問題

２０１７年7月２６日　１３：３０－１６：３０

問題１． $S^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$ とする。$U(1) = \{u \in \mathbf{C} \mid |u| = 1\}$ について、$U(1)$ の S^5 への作用 $\cdot : U(1) \times S^5 \longrightarrow S^5$ を $u \cdot (z_1, z_2, z_3) = (uz_1, uz_2, uz_3)$ で定める。

(1) S^5 は C^∞ 級多様体であることを示せ。

(2) $U(1)$ の有限部分群 H に対し、H で写りあう点を同一視した空間 S^5/H は、向き付け可能 C^∞ 級多様体となることを示せ。

(3) $U(1)$ で写りあう点を同一視した空間 $S^5/U(1)$ は C^∞ 級多様体となることを示せ。

問題２． $\mathbf{R}^3$ 上の関数 $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + x^2 + z^2$ を考える。

(1) 関数 f の臨界点、臨界値、臨界点のヘッセ行列の負の固有値の個数を求めよ。

(2) $a \in \mathbf{R}$ に対し、$f^{-1}(a)$ が多様体であるかどうか論ぜよ。

(3) $a \in \mathbf{R}$ に対し、$f^{-1}(a)$ が連結かどうか論ぜよ。

問題３． $h : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ を C^∞ 級関数とし、h のグラフ $M = \{(\overrightarrow{x}, h(\overrightarrow{x})) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid \overrightarrow{x} \in \mathbf{R}^n\}$ を考える。$\mathbf{R}^n$ への射影 $M \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を座標関数とする。すなわち、M の点 $(\overrightarrow{x}, h(\overrightarrow{x}))$ は座標 $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ で表される。このとき、M の接空間 $T_{(\overrightarrow{x}, h(\overrightarrow{x}))}M$ の基底は $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ で表される。

(1) $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の計量は、$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の座標を $(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ とするとき、内積 $\dfrac{\partial}{\partial y_i} \bullet \dfrac{\partial}{\partial y_j} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n+1)$ で与えられる。この $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の計量から M に誘導されるリーマン計量 g に対し、$g_{ij} = g(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^n$ 上の関数 h の勾配 $\mathrm{grad}(h) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial x_j}\right)_{j=1,\ldots,n}$ は、行列 $G = \left(g_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ およびその逆行列 $G^{-1} = \left(g^{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ の固有ベクトルであることを示せ。

(3) クリストッフェル・シンボル　$\Gamma^\ell_{ij} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_k g^{k\ell}(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j})$ に現れる $\Gamma_{kij} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right)$ を求めよ。さらにクリストッフェル・シンボル Γ^ℓ_{ij} を求めよ。

(4) 測地線の方程式　$\dfrac{\mathrm{d}^2 x_\ell}{\mathrm{d}t^2} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \Gamma^\ell_{ij} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = 0$　$(\ell = 1, \ldots, n)$ の解をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の曲線 $\begin{pmatrix} \overrightarrow{x}(t) \\ h(\overrightarrow{x}(t)) \end{pmatrix}$ とみるとき、$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} \overrightarrow{x}(t) \\ h(\overrightarrow{x}(t)) \end{pmatrix}$ はグラフ M の法線方向であることを示せ。