2　陰関数定理と逆写像定理

2.1　陰関数定理　その 1

- 【定理】　（陰関数定理]）$f(x_1,\dots,x_n,z)$ は連続微分可能とし、$\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},z^{(0)})} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{(\vec{x}^{(0)},z^{(0)})} \neq 0$ とすると $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},z^{(0)}) = (\vec{x}^{(0)},z^{(0)})$ の近傍で、レベルサーフェス $f(\vec{x},z) = f(\vec{x}^{(0)},z^{(0)})$ は $\vec{x}^{(0)}$ の近傍から z_0 の近傍への連続微分可能関数のグラフとなる。

- 【証明】　陰関数定理の証明をしよう。

  · $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}^0,z^{(0)}) > 0$ であるとする。偏微分の連続性から、$(\vec{x}^0,z^{(0)})$ を含むある直方体

  $$[x_1^{(0)}-a_1,x_1^{(0)}+a_1]\times\cdots\times[x_n^{(0)}-a_n,x_n^{(0)}+a_n]\times[z^{(0)}-c,z^{(0)}+c]$$

  上で $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{x},z) > 0$ であり、この直方体上で、$f(\vec{x},z)$ は z について単調増加である。
  さて、正実数 ε を

  $$\varepsilon = \min\{f(\vec{x}^0,z^{(0)}) - f(\vec{x}^0,z^{(0)}-c),\ f((\vec{x}^0,z^{(0)}+c) - f((\vec{x}^0,z^{(0)})\}$$

  で定めると、ある δ に対し、$\|\vec{x}-\vec{x}^0\| \leqq \delta$ のとき、

  $$f(\vec{x},z^{(0)}-c) < f(\vec{x}^0,z^{(0)}) - \frac{\varepsilon}{2},\quad f(\vec{x}^0,z^{(0)}) + \frac{\varepsilon}{2} < f(\vec{x},z^{(0)}+c)$$

  である。このような各 $(\vec{x},z)$ に対し、中間値の定理から区間 (z_0-c,z_0+c) 上の 1 点 z で $f(\vec{x},z) = f(\vec{x}^0,z^0)$ となる。単調性からこのような z はただ 1 つ定まり、それを $g(\vec{x})$ とおく。

  · $g(x,y)$ が (x,y) について連続であることは、$(x,y,g(x,y))$ において、上の議論を繰り返し示すことができるが、後の議論を透明にするためにリプシッツ連続であることを示す。
  $f(\vec{x},z)$ のひとつの方向 $(\vec{v},w)$ への変化を調べる。
  $\left(\dfrac{\mathrm{d}f(\vec{x}+t\vec{v},z+tw)}{\mathrm{d}t}\right)_{(0)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(\vec{x},z)}v_i + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(\vec{x},z)}w$ を得る。仮定から、直方体上で $\dfrac{\partial f}{\partial z} > 0$ であるが、これは $(\vec{v},w) = (\vec{0},1)$ のときにベクトル $\mathrm{grad}f$ と $(\vec{v},w)$ の内積 $\displaystyle\sum_{i=1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(\vec{x},z)}v_i + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(\vec{x},z)}w$ が正であることを言っている。

  内積は連続であるから方向 $(\vec{v},1)$ が $(\vec{0},1)$ に近いとき、すなわち、ある δ に対し $\|\vec{v}\| < \delta$ ならば内積の値は正となる。すなわち、その方向で $f(x,y,z)$ は単調増加であり、$(\vec{x}^1,g(\vec{x}^1))$ に対し、$(\vec{x}^2,z^{(2)})$ が、$z^{(2)} - g(\vec{x}^1) > \dfrac{1}{\delta}\|\vec{x}^2-\vec{x}^1\|$ を満たせば、$f(\vec{x}^2,z^{(2)}) > f(\vec{x}^1,g(\vec{x}^1)) = f(\vec{x}^0,z^{(0)})$, また、$z^{(2)} - g(\vec{x}^1) <$

$-\dfrac{1}{\delta}\|\overrightarrow{x}^2-\overrightarrow{x}^1\|$ を満たせば、$f(\overrightarrow{x}^2,z^{(2)})<f(\overrightarrow{x}^1,g(\overrightarrow{x}^1))=f(\overrightarrow{x}^0,z^{(0)})$ となる。よって、$g(\overrightarrow{x}^2)$ は $f(\overrightarrow{x}^2,g(\overrightarrow{x}^2))=f(\overrightarrow{x}^0,z^{(0)})$ を満たすから、

$$|g(\overrightarrow{x}^2)-g(\overrightarrow{x}^1)|\leqq\frac{1}{\delta}\|\overrightarrow{x}^2-\overrightarrow{x}^1\|$$

を満たす。これで、$g(\overrightarrow{x})$ が $\dfrac{1}{\delta}$ をリプシッツ定数としてリプシッツ連続であることが示された。

・さて、$g(\overrightarrow{x})$ の偏微分について調べよう。$f(\overrightarrow{x},g(\overrightarrow{x}))=f(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)})$ $(z^{(1)}=g(\overrightarrow{x}))$ について、$f(\overrightarrow{x},z)$ の微分可能性から、

$$\begin{aligned}&f(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{v},g(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{v}))\\&=f(\overrightarrow{x})+\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)_{(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)})}v_i+\frac{\partial f}{\partial z}(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)})(g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1))\\&\qquad+\varepsilon(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)},\overrightarrow{v},g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1)),\end{aligned}$$

$$\lim\frac{\varepsilon(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)},\overrightarrow{v},g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1))}{\sqrt{\|\overrightarrow{v}\|^2+(g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1))^2}}=0$$

である。従って

$$g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)_{(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)})}}{\Big(\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)_{(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)})}}v_i-\varepsilon_1(\overrightarrow{x}^1,\overrightarrow{v})$$

において、

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_1(\overrightarrow{x}^1,\overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{v}\|}&=\frac{1}{\Big(\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)(\overrightarrow{x},z^{(1)})}\frac{\varepsilon(\overrightarrow{x}^1,z^{(1)},\overrightarrow{v},g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1))}{\sqrt{\|\overrightarrow{v}\|^2+(g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1))^2}}\\&\qquad\times\frac{\sqrt{\|\overrightarrow{v}\|^2+(g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1))^2}}{\|\overrightarrow{v}\|}\end{aligned}$$

となるが、$g(x,y)$ のリプシッツ連続性により、

$$\sqrt{\|\overrightarrow{v}\|^2+(g(\overrightarrow{x}^1+\overrightarrow{v})-g(\overrightarrow{x}^1))^2}\leqq\sqrt{(1+\frac{1}{\delta^2})}\|\overrightarrow{v}\|$$

だから、$\overrightarrow{v}\longrightarrow 0$ のとき、$\dfrac{\varepsilon_1(\overrightarrow{x}^1,\overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{v}\|}\longrightarrow 0$ となる。従って

$$\Big(\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big)_{(\overrightarrow{x})}=-\frac{\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)_{(\overrightarrow{x},g(\overrightarrow{x}))}}{\Big(\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)_{(\overrightarrow{x},g(\overrightarrow{x}))}}$$

であることがわかる。これらは連続な関数である。

- **注意。** $g(\vec{x})$ が偏微分可能であることがわかっていて $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = c$ ならば、$\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ が上の式で与えられなければいけないことは $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = c$ を偏微分すればわかる。上の証明では ε_1 の評価が最重要の点であり、リプシッツ連続性を用いるとこれがうまくできるのである。

- $U \subset \boldsymbol{R}^n$ を開集合。C^1 級写像 $f : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ について、$f^{-1}(0)$ 上で $DF \neq \boldsymbol{0}$ ならば、$f^{-}(0)$ は（C^1 級の）滑らかな曲面である。すなわち各点の近傍で、$f^{-}(0)$ は、1 つの座標を除いた $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の開集合上の関数のグラフの形に書かれる。

- $U \subset \boldsymbol{R}^n$ を開集合とし、C^1 級関数 $f : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ について、$Df \neq \boldsymbol{0}$ とする。$\vec{x}^0 \in \boldsymbol{R}^n$ における $\{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)\}$ の接平面は、

$$\{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(\vec{x}^0)}(x_i - x_i^{(0)}) = (Df)_{(\vec{x}^0)}(\vec{x} - \vec{x}^0) = 0\}$$

  で与えられる。

- 【例】　$f(x, y, z) = xyz + x + y + z = 0$
  $Df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz + 1 & xz + 1 & xy + 1 \end{pmatrix}$
  $Df = \boldsymbol{0}$ ならば $(x - y)z = 0$ で、$x = y$ のとき $xy + 1 \neq 0$ だから、$z = 0$. 同様に、$x = 0, y = 0$ であるが、このときには $Df \neq \boldsymbol{0}$ である。従って、$Df = \boldsymbol{0}$ とはならない。$f(x, y, z) = xyz + x + y + z = 0$ は滑らかな曲面を定める。この曲面は連結である。

- 【例】　$f(x, y, z) = xyz - x - y - z = 0$
  $Df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz - 1 & xz - 1 & xy - 1 \end{pmatrix}$
  上の例と同様に $Df = \boldsymbol{0}$ とはならない。$f(x, y, z) = xyz - x - y - z = 0$ は滑らかな曲面を定める。この曲面は連結ではない。

2.2　高さ関数

- 【問題】　$U \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ を開集合とし、$\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ の座標を $(\vec{x}, z) = (x_1, \ldots, x_n, z)$ で与える。C^2 級関数 $f : U \longrightarrow \boldsymbol{R}$ について、$Df \neq \boldsymbol{0}$ とする。$\vec{x}(t)$ が $\mathrm{grad}(f) \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たせば、$f(\vec{x}(t))$ は一定で、$\vec{x}(t)$ は等位面上にある。$\vec{x}(t)$ が f の等位面上を動くとき、z 座標（高さ）の差は $z(1) - z(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \vec{e}_{n+1} \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ であるが、$\mathrm{grad}(f) \bullet \vec{v} = 0$ となる等位面に沿うベクトル場 $\vec{v}$ で $\vec{e}_{n+1} \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ となるものがある。$\vec{v}$ を等位面上の高さ関数 z の勾配ベクトル場と呼ぶ。このような $\vec{v}$ を求めよ。

- 【解答例】　$\mathrm{grad}(f) \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすどのような $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ に対しても $(\vec{e}_{n+1} - \vec{v}) \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = 0$ であるから、$\vec{e}_{n+1} - \vec{v} = a\ \mathrm{grad}(f)$ である。$\mathrm{grad} f \bullet \vec{e}_{n+1} = a\ \|\mathrm{grad}(f)\|^2$. ゆえに、$\vec{v} = \vec{e}_{n+1} - \dfrac{\mathrm{grad} f \bullet \vec{e}_{n+1}}{\|\mathrm{grad}(f)\|^2} \mathrm{grad} f$ となる。

- 【注意】　高さの関数は、超曲面に制限すると、高さの関数の臨界点においては、微分は $\mathbf{0}$ であり、近傍では微分は小さい。従って、超曲面に制限した高さの関数の勾配は有界になる。

- 【問題】　$f:\boldsymbol{R}^{n+1}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ を $f(\overrightarrow{x},z)=\|\overrightarrow{x}\|^2+z^2$ とする。f の等位面上の高さ関数 z の勾配ベクトル場を求めよ。

- 【解答例】　$\mathrm{grad}(f)=2\begin{pmatrix}\overrightarrow{x}\\ z\end{pmatrix}$ であるから、

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{e}_{n+1}-\frac{2z}{4(\|\overrightarrow{x}\|^2+z^2)}2\begin{pmatrix}\overrightarrow{x}\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{z\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|^2+z^2}\\ \dfrac{\|\overrightarrow{x}\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2+z^2}\end{pmatrix}$$

$(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ という座標に対し、$\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\\ -\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\\ (\sin\theta)^2\end{pmatrix}$

- 【問題】　$f:\boldsymbol{R}^{n+1}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ を $f(\overrightarrow{x},z)=\|\overrightarrow{x}\|^2-z^2$ とする。等位面上の高さ関数 z の勾配ベクトル場を求めよ。

- 【解答例】　$\mathrm{grad}(f)=2\begin{pmatrix}\overrightarrow{x}\\ -z\end{pmatrix}$ であるから、

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{e}_{n+1}+\frac{2z}{4(\|\overrightarrow{x}\|^2+z^2)}2\begin{pmatrix}\overrightarrow{x}\\ -z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{z\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|^2+z^2}\\ \dfrac{\|\overrightarrow{x}\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2+z^2}\end{pmatrix}$$

$f(\overrightarrow{x},z)=1$ のときは、$\|\overrightarrow{x}\|^2=z^2+1$ で一葉双曲面。$(\cosh\theta\cos\varphi,\cosh\theta\sin\varphi,\sinh\theta)$

$(\theta\in(-\infty,\infty))$ に対し、$\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\dfrac{\cosh\theta\sinh\theta\cos\varphi}{(\cosh\theta)^2+(\sinh\theta)^2}\\ \dfrac{\cosh\theta\sinh\theta\sin\varphi}{(\cosh\theta)^2+(\sinh\theta)^2}\\ \dfrac{(\cosh\theta)^2}{(\cosh\theta)^2+(\sinh\theta)^2}\end{pmatrix}$

$f(\overrightarrow{x},z)=-1$ のときは、$\|\overrightarrow{x}\|^2+1=z^2$ で二葉双曲面。$(\sinh\theta\cos\varphi,\sinh\theta\sin\varphi,\pm\cosh\theta)$

$(\theta\in[0,\infty))$ に対し、$\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\dfrac{\cosh\theta\sinh\theta\cos\varphi}{(\cosh\theta)^2+(\sinh\theta)^2}\\ \dfrac{\cosh\theta\sinh\theta\sin\varphi}{(\cosh\theta)^2+(\sinh\theta)^2}\\ \dfrac{\pm(\sinh\theta)^2}{(\cosh\theta)^2+(\sinh\theta)^2}\end{pmatrix}$

- 高さの関数の極値、ヘッセ行列は次のように計算される。

- 【問題】　$U\subset\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}$ を開集合とし、$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}$ の座標を $(\overrightarrow{x},z)=(x_1,\dots,x_n,z)$ で与える。C^2 級関数 $f:U\longrightarrow\boldsymbol{R}$ について、$(\dfrac{\partial f}{\partial z})_{(\overrightarrow{x}^0,z^{(0)})}\neq 0$ とする。このとき $f(\overrightarrow{x},g(\overrightarrow{x}))=f(\overrightarrow{x}^0,z^{(0)})$ を満たす g は C^2 級であることを既知とする。さらに、$(Df)_{(\overrightarrow{x}^0,z^{(0)})}=\mathbf{0}$ のとき、ヘッセ行列を f で表せ。

- 【解答例】　$f(\vec{x}, g(\vec{x})) = f(\vec{x}^0, z^{(0)})$ を x_i で偏微分して

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(\vec{x},g(\vec{x}))} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(\vec{x},g(\vec{x}))}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{(\vec{x})} = 0$$

さらに x_j で偏微分して、

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(\vec{x},g(\vec{x}))} + \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial z}\right)_{(\vec{x},g(\vec{x}))} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{(\vec{x},g(\vec{x}))}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)_{(\vec{x})}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{(\vec{x})}$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(\vec{x},g(\vec{x}))}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(\vec{x})} = 0$$

ここで、$\vec{x}^0$ において、$(Df)_{(\vec{x}^0, z^{(0)})} = \mathbf{0}$ だから、$(Dg)_{(\vec{x}^0)} = \mathbf{0}$ である。従って、

$$(Hg)_{(\vec{x})} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = -\frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

- 【例】　$(16 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4((4x + 3z)^2 + (5y)^2) = 0$ は、有界な図形である。左辺を f とおく。$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ に対し、$f \geqq (16 + R^2)^2 - 4(7^2R^2 + 5^2R^2) = R^4 + 4(8 - 74)R^2 + 16^2 > 0$ が $R^2 > 4 \cdot 66$ で成立する。

$\mathrm{grad}(f) = \begin{pmatrix} 4x(16 + x^2 + y^2 + z^2) - 32(4x + 3z) \\ 4y(16 + x^2 + y^2 + z^2) - 200y \\ 4z(16 + x^2 + y^2 + z^2) - 24(4x + 3z) \end{pmatrix}$ である。成分を 4 で割り、x, y, z をかけて加えると、

$$(x^2 + y^2 + z^2)(16 + x^2 + y^2 + z^2) - 8x(4x + 3z) - 50y^2 + 6z(4x + 3z) = 0$$

$f = 0$ との差をとると

$$\begin{aligned} &16(16 + x^2 + y^2 + z^2) - 4((4x + 3z)^2 + (5y)^2) + 2(4x + 3z)^2 + 50y^2 \\ &= 16(16 + x^2 + y^2 + z^2) - 2\{(4x + 3z)^2 + (5y)^2\} = 0 \end{aligned}$$

$(16 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4((4x + 3z)^2 + (5y)^2) = 0$ に代入して、

$$\begin{aligned} &(16 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 32(16 + x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + 16)(x^2 + y^2 + z^2 - 16) = 0 \end{aligned}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ならば、$\mathrm{grad}(f) = \begin{pmatrix} 32 \cdot 4x - 32(4x + 3z) \\ 32 \cdot 4y - 200y \\ 32 \cdot 4z + 24(4x + 3z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \cdot 3z \\ -18 \cdot 4y \\ 24 \cdot 4x + 200z \end{pmatrix}$ が $\vec{0}$ となるのは、$(0, 0, 0)$ であるが、これは $f = 0$ 上にはない。従って、$f = 0$ は滑らかな曲面となる。

$\pm(4, 0, 6)$, $\pm(4, 0, 0)$ で、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \pm 816$,∓ 384. $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -128 + 8x^2 + 4(16 + x^2 + y^2 + z^2) & 8xy \\ 8xy & -200 + 8y^2 + 4(16 + x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}$ の

値は、$\begin{pmatrix} 272 & 0 \\ 0 & 72 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 0 & -72 \end{pmatrix}$ となる。$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ は、$\mp\dfrac{1}{816}\begin{pmatrix} 272 & 0 \\ 0 & 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & \mp\dfrac{3}{34} \end{pmatrix}$, $\pm\dfrac{1}{384}\begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 0 & -72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & \mp\dfrac{3}{16} \end{pmatrix}$ となる。

$(16+x^2+y^2+z^2)^2-4((4x+3z)^2+(5y)^2)=0$ と $z=0$ の交点は $(x^2+(y-3)^2-25)(x^2+(y+3)^2-25)=0$ で表される。

$(16+x^2+y^2+z^2)^2-4((4x+3z)^2+(5y)^2)=0$ であらわされる曲面は、xz 平面内の z 軸からの距離が 5 の点を中心とする半径 3 の円を z 軸の周りに回転したトーラス面を、y 軸の周りに回転し、xy 平面が 2 重接平面となるようにしたものである。

一般に円周をその平面上の軸の周りに回転させた回転面のトーラスの二重接平面とトーラスの交点集合は 2 つの円周の和集合となる。ビラルソーの円周と呼ぶ。

図形的な意味を知っていると、$\pm(4,0,6)$, $\pm(4,0,0)$ で、接平面が z 軸と垂直になることがわかるが、式から導くのは、自明ではない。

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ だから、$y=0$ または $x^2+y^2+z^2+16=50$ である。

$x^2+y^2+z^2+16=50$ のとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ から、$3x-4z=0$. $f(x,y,z)=50^2-4((4x+3z)^2+(3x-4z)^2+(5y)^2)=50^2-100(x^2+y^2+z^2)\neq 0$ となる。

$y=0$ のとき、$4x(16+x^2+z^2)-32(4x+3z)=0$, $(16+x^2+z^2)^2-4(4x+3z)^2=0$ から、$(16+x^2+z^2)^2=4(4x+3z)^2=\dfrac{x^2}{4^2}(16+x^2+z^2)^2$、ゆえに $x=\pm 4$. このとき、$4x(16+16+z^2)-32(4x+3z)=0$, $4xz^2=96z$, $z=0$ or ± 6, となる。

2.3　2 次超曲面　その 2

- 前にみたように、$\boldsymbol{R}^n$ の座標の 2 次関数は、

$$f(x_1,\dots,x_n)=a_0+\sum_{i=1}^n a_i x_i+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = a_0+{}^t\vec{a}\,\vec{x}+{}^t\vec{x}A\vec{x}$$

のように書かれる。ただし A は対称行列である。

$$Df=\left(a_i+2\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)_{i=1,\dots,n}={}^t\vec{a}+2\,{}^t\vec{x}A$$

A が正則であるとき、$Df=0$ となるのは ${}^t\vec{x}=-\dfrac{1}{2}{}^t\vec{a}A^{-1}$ においてである。この $\vec{x}$ に対し、

$$f(\vec{x})=a_0-\frac{1}{2}{}^t\vec{a}A^{-1}\vec{a}+\frac{1}{4}{}^t\vec{a}A^{-1}AA^{-1}\vec{a}=a_0-\frac{1}{4}{}^t\vec{a}A^{-1}\vec{a}$$

であるから、この値が 0 とならない a_0 に対し、$\{\vec{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid f(\vec{x})=0\}$ 上で、$Df\neq {}^t\vec{0}$ である。この $f=0$ で定まる部分集合は 2 次超曲面と呼ばれる。

対称行列 A に対し、直交行列 P が存在し、${}^tPAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となる。$\vec{x} = P\vec{y}$ により座標変換すると、$g(\vec{y}) = f(P\vec{y}) = a_0 + {}^t\vec{a}P\vec{y} + {}^t\vec{y}\,{}^tPAP\vec{y}$ は

$$g(\vec{y}) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2 = a_0 - \frac{{b_i}^2}{4\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i + \frac{b_i}{2\lambda_i})^2$$

のように書かれる。$\vec{y}$ の座標を平行移動して、2次超曲面は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2 = c$ で定義されるものと合同になる。λ_i, c の正負により形が定まる。

$n = 3$, A が正則のときは、楕円面、一葉双曲面、二葉双曲面のどれかになる。

- 超曲面族　陰関数定理は、$\dfrac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ という仮定の下で、$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{x} \\ f(\vec{x}, z) \end{pmatrix}$ という写像を考えると $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ g(\vec{x}, z^{(0)}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{x} \\ f(\vec{x}^0, z^{(0)}) \end{pmatrix}$ という写像となっていることを述べている。等位面の族が直積の上に定義される超曲面の族と同様に定まっていることを述べている。つまり、$n+1$ 次元空間の間の写像について述べている。こういうものを扱うことが必要になる。

2.4　ベクトル値関数

- $U \subset \boldsymbol{R}^n$, $V \subset \boldsymbol{R}^m$ を開集合とし、写像 $U \longrightarrow V$ はベクトル値関数の形に書かれる。

- 【定義】　$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ が $\vec{x}$ で微分可能とは、行列 A で、

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}) = A\vec{v} + \vec{R}_1(\vec{x}, \vec{v})$$

において、任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対し、$\delta_1 > 0$ で、$\|\vec{v}\| < \delta_1 \Longrightarrow \|\vec{R}_1(\vec{x}, \vec{v})\| < \varepsilon_1 \|\vec{v}\|$ とするものが存在することである。

- このとき、各成分 f_i は $\vec{x}$ で偏微分可能で、$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ となる。A をヤコビ行列と呼ぶ。$A = D\vec{f}$ と書くことにする。

- 【定義】　正整数 r に対し、$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ の各成分 f_i の r 階までの偏微分が存在し連続であるとき、f は C^r 級であるという。任意の正整数 r に対し、C^r 級のとき、C^∞ 級であるという。

- 【命題】（チェインルール）　$U \subset \boldsymbol{R}^n$, $V \subset \boldsymbol{R}^m$ を開集合とし、$\vec{f} : U \longrightarrow V$ が $\vec{x}$ で微分可能、$\vec{g} : V \longrightarrow \boldsymbol{R}^\ell$ が $\vec{f}(\vec{x})$ で微分可能とするとき、$\vec{g} \circ \vec{f}$ は $\vec{x}$ で微分

可能であり、$(D\vec{g})_{(\vec{f}(\vec{x}))}(D\vec{f})_{(\vec{x})}$ をヤコビ行列とする。この微分の法則をチェインルールと呼ぶ。

- 【証明】　$\vec{f}$ に対しては、$\vec{x}$ において行列 A で、

$$\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x})=A\vec{v}+\vec{R}_1(\vec{x},\vec{v})$$

において、任意の $\varepsilon_1>0$ に対し、$\delta_1>0$ で、$\|\vec{v}\|<\delta_1 \Longrightarrow \|\vec{R}_1(\vec{x},\vec{v})\|<\varepsilon_1\|\vec{v}\|$ とするものが存在する。
$\vec{g}$ に対しては、$\vec{y}$ において行列 B で、

$$\vec{g}(\vec{y}+\vec{w})-\vec{g}(\vec{y})=B\vec{w}+\vec{R}_2(\vec{y},\vec{w})$$

において、任意の $\varepsilon_2>0$ に対し、$\delta_2>0$ で、$\|\vec{w}\|<\delta_2 \Longrightarrow \|\vec{R}_2(\vec{y},\vec{w})\|<\varepsilon_2\|\vec{w}\|$ とするものが存在する。

$$\begin{aligned}
&\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}+\vec{v}))-\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))\\
&=B(\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}))+\vec{R}_2(\vec{f}(\vec{x}),\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}))\\
&=B(A\vec{v}+\vec{R}_1(\vec{x},\vec{v}))+\vec{R}_2(\vec{f}(\vec{x}),\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}))\\
&=BA\vec{v}+B\vec{R}_1(\vec{x},\vec{v})+\vec{R}_2(\vec{f}(\vec{x}),\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}))
\end{aligned}$$

ここで、B の各成分について $|B_{ij}|\leqq M_2$ ならば、$\|\vec{v}\|<\delta_1$ のとき

$$\|B\vec{R}_1(\vec{x},\vec{v})\|\leqq M_2 m\varepsilon_1\|\vec{v}\|.$$

A の各成分について $|A_{ij}|\leqq M_1$ ならば、$\|\vec{v}\|<\delta_1$ のとき、

$$\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}))\|\leqq(M_1 n+\varepsilon_1)\|\vec{v}\|$$

となる。従って、$\|\vec{v}\|<\dfrac{\delta_2}{M_1 n+\varepsilon_1}$ のとき、

$$\|\vec{R}_2(\vec{f}(\vec{x}),\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}))\|\leqq\varepsilon_2\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x})\|\leqq\varepsilon_2(M_1 n+\varepsilon_1)\|\vec{v}\|$$

ゆえに、

$$\|B\vec{R}_1(\vec{x},\vec{v})+\vec{R}_2(\vec{f}(\vec{x}),\vec{f}(\vec{x}+\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}))\|\leqq(M_2 m\varepsilon_1+\varepsilon_2(M_1 n+\varepsilon_1))\|\vec{v}\|$$

従って $\vec{g}\circ\vec{f}$ は BA をヤコビ行列として微分可能である。

- 【問題】　C^r 級写像の合成は C^r 級であることを示せ。
- 【解答例】

　・$U\subset \boldsymbol{R}^n, V\subset\boldsymbol{R}^m$ を開集合とし、$\vec{f}=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}:U\longrightarrow V$, $\vec{g}=\begin{pmatrix} g_1\\ \vdots\\ g_\ell\end{pmatrix}:V\longrightarrow \boldsymbol{R}^\ell$ とする。

- $B_{(\vec{f}(\vec{x}))}A_{(\vec{x})}$ は、$\vec{x}$ について連続であるから、$\vec{f}, \vec{g}$ が C^1 級ならば $\vec{g} \circ \vec{f}$ も C^1 級である。
- 帰納法により、$\vec{f}, \vec{g}$ が C^{r-1} 級ならば $\vec{g} \circ \vec{f}$ も C^{r-1} 級であることが示されているとする。$\vec{f}, \vec{g}$ を C^r 級とするとき、$r \geqq 1$ だから

$$D(\vec{g} \circ \vec{f})_{(\vec{x})} = D(\vec{g})_{(\vec{f}(\vec{x}))}(D\vec{f})_{(\vec{x})}$$

が成立し、ここで、$D(\vec{g})_{(\vec{f}(\vec{x}))}$ は、$\vec{f}$ と $D(\vec{g})$ の合成で、帰納法により C^{r-1} 級、$(D\vec{f})_{(\vec{x})}$ も C^{r-1} 級、行列の演算は C^∞ 級だから、$D(\vec{g} \circ \vec{f})_{(\vec{x})}$ は C^{r-1} 級となり、$\vec{g} \circ \vec{f}$ は C^r 級である。

- $U \subset \boldsymbol{R}^n$, $V \subset \boldsymbol{R}^m$ を開集合とし、C^∞ 級写像 $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow U$ が、$f \circ g = \mathrm{id}_V$, $g \circ f = \mathrm{id}_U$ をみたすとする。このとき、f, g は微分同相写像と呼ばれる。

- ユークリッド空間の２つの開集合 $U \subset \boldsymbol{R}^n, V \subset \boldsymbol{R}^m$ が微分同相ならば、ユークリッド空間の次元は等しく、微分同相写像の微分のランクはこの次元に等しい。実際、$f(\vec{x}) = \vec{y}$, $g(\vec{y}) = \vec{x}$ とすると $(Df)_{(\vec{x})} \circ (Dg)_{(\vec{y})} = \mathbf{1}_m$, $(Dg)_{(\vec{y})} \circ (Df)_{(\vec{x})} = \mathbf{1}_n$ となる。$\mathrm{rank}((Df)_{(\vec{x})}) \leqq \min\{n, m\}$, $\mathrm{rank}((Dg)_{(\vec{y})}) \leqq \min\{n, m\}$ から、

$$m = \mathrm{rank}(\mathbf{1}_m) = \mathrm{rank}((Df)_{(\vec{x})} \circ (Dg)_{(\vec{y})}) \leqq \min\{n, m\},$$

$$n = \mathrm{rank}(\mathbf{1}_n) = \mathrm{rank}((Dg)_{(\vec{y})} \circ (Df)_{(\vec{x})}) \leqq \min\{n, m\}$$

だから、$m = n$ で、$m = n = \mathrm{rank}((Df)_{(\vec{x})}) = \mathrm{rank}((Dg)_{(\vec{y})})$ である。

- **逆写像定理**。n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U と，U から $\boldsymbol{R}^n$ への写像 $\vec{F} : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が与えられているとする．$\vec{F}$ は U 上 C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする．すなわち，$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ と書くとき，$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ が，C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする．U 上の点 $\vec{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ において次の行列（ヤコビ行列）が正則（可逆）であるとする．

$$(D\vec{F})_{(\vec{x}^0)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

このとき，$\vec{y}^0 = \vec{F}(\vec{x}^0)$ の近傍 V, V 上で定義された C^r 級写像 $\vec{G} : V \longrightarrow U$ で，$\vec{G}(\vec{y}^0) = \vec{x}^0$, $\vec{G} \circ \vec{F} = \mathrm{id}_{\vec{G}(V)}$, $\vec{F} \circ \vec{G} = \mathrm{id}_V$ を満たすものが存在する．

- ここで，$\mathrm{id}_{G(V)} : G(V) \longrightarrow G(V)$, $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ は恒等写像である．この G は F の局所的な逆写像と呼ばれる．n **次元ユークリッド空間** $\boldsymbol{R}^n$ **の開集合** U は,「U の各点

$\vec{x}^0$ に対し，ある正実数 $\delta_{\vec{x}^0}$ をとると，$\vec{x}^0$ の $\delta_{\vec{x}^0}$ 近傍 $\{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta_{\vec{x}^0}\}$ が U に含まれる」という性質により定義される．$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し，$\|\vec{x}\|$ はユークリッドの**ノルム** $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$ である．

- **【定義】**　正整数 r に対し，$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U 上の関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が C^r **級**であるとは，正整数 $s \leqq r$ に対し，$f(x_1, \ldots, x_n)$ のすべての s 階の偏微分が存在し，連続であることである．
- 1 次元のときは、連続写像に対しても（狭義単調関数に対して）定式化できたが、2 次元以上では易しくない。
- アフィン写像に対しては、$\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{x}^0) + \vec{y}^0$ で、A が逆行列をもつ場合であるから易しい。
- アフィン写像と異なり、逆写像定理は局所的な逆写像の存在しか与えない。
- **【定義】**　ユークリッド空間の開集合の間の同相写像 f が、C^r 級 $(r \geqq 1)$ で、いたるところヤコビ行列が正則ならば、f^{-1} も C^r 級となる。このような f は、C^r 級微分同相写像と呼ばれる。
- **【陰関数定理】**　正整数 m, n について，$m < n$ とする．n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U から m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ への C^r 級 $(r \geqq 1)$ 写像 $\vec{F} : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ が与えられているとする．$\vec{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in U$ において，$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ のヤコビ行列 $(D\vec{F})_{(\vec{x}^0)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ のランク（rank, 階数）が m であるとする．すなわち，適当に m 個の列をとると，それらの列は線形独立であるとする．そこで，座標 $x_1, \ldots, x_n$ の順序を入れ替えて，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ は正則であるとする．このとき，$(x_1^0, \ldots, x_{n-m}^0) \in \boldsymbol{R}^{n-m}$ の近傍 $W \subset \boldsymbol{R}^{n-m}$ と C^r 級写像 $\vec{g} : W \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ で，

$$\begin{aligned} &\vec{g}(x_1^0, \ldots, x_{n-m}^0) = (x_{n-m+1}^0, \ldots, x_n^0), \\ &\vec{F}(x_1, \ldots, x_{n-m}, \vec{g}(x_1, \ldots, x_{n-m})) = \vec{F}(\vec{x}^0) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する．
- アフィン写像の場合、A を $m \times n$ 行列 $(m \leqq n)$ とし、ランクが m であるとする。$\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{x}^0) + \vec{y}^0$ という状況であるが、$\vec{x}^0 = \vec{0}$, $\vec{y}^0 = \vec{0}$ とすると、$yy = A\vec{x}$. ランクの条件から、$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}$ を考えると、逆行列 $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ が存

在する。$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ だから、逆行列は $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ の形である。

$A\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ (B_{21}+B_{22}A_1)\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \end{pmatrix}$ となる。

- 逆写像定理を仮定して陰関数定理を導くのは、線型の場合とほぼ同じである。

- 証明。$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m-n} \times \boldsymbol{R}^n$ として、$\vec{H}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{F}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ とおくと、ヤコビ行列 $(D\vec{H})_{\vec{x}^0}$ は正則行列であるから、$\vec{H}(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} (\vec{x}^0)_1 \\ \vec{F}(\vec{x}^0) \end{pmatrix}$ の近傍 V で定義された $\vec{G} : V \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ が存在し、$\vec{G} \circ \vec{H} = \mathrm{id}_{\vec{G}(V)}$, $\vec{H} \circ \vec{G} = \mathrm{id}_V$ となる。成分で $\vec{G}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \begin{pmatrix} \vec{G}_1(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \\ \vec{G}_2(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \end{pmatrix}$ と書くと、

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \vec{H}(\vec{G}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)) = \vec{H}(\vec{G}_1(\vec{y}_1, \vec{y}_2), \vec{G}_2(\vec{y})) = \begin{pmatrix} \vec{G}_1(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \\ \vec{F}(\vec{G}_1(\vec{y}), \vec{G}_2(\vec{y})) \end{pmatrix}$$

だから、$\vec{G}_1(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \vec{y}_1$ である。このとき、

$$\vec{y}_2 = \vec{F}(\vec{G}_1(\vec{y}_1, \vec{y}_2), \vec{G}_2(\vec{y}_1, \vec{y}_2)) = \vec{F}(\vec{y}_1, \vec{G}_2(\vec{y}_1, \vec{y}_2))$$

$$\vec{F}(\vec{x}^0) = \vec{y}_2^0 = \vec{F}(\vec{y}_1, \vec{G}_2(\vec{y}_1, \vec{y}_2^0))$$

すなわち $F(\vec{x}^0) = F(\vec{x}_1, G_2(\vec{x}_1, F(\vec{x}^0)))$

- 【逆写像定理の証明】　アフィン写像を合成して、チェインルールを用いると、$\vec{x}^0 = \vec{F}(\vec{x}^0) = \vec{0}$ でヤコビ行列 $D\vec{F}$ が単位行列のときに証明されていれば、一般の場合に証明される。

- 【補題】。C^1 級ならば局所リプシッツである。

- 0 に近い $\vec{y}$ に対し，$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{y}$ となる $\vec{x}$ を求めたいが，まず第 1 近似として $\vec{x}_1 = \vec{y}$ としてみる．そうすると，$\vec{F}$ は恒等写像と近いのだから $\vec{F}(\vec{x}_1) - \vec{y}$ は，$\vec{0}$ に近い．そのずれを，$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 - (\vec{F}(\vec{x}_1) - \vec{y})$ と補正してみる．$\vec{F}(\vec{x}_2) - \vec{y}$ は 0 ではないだろうから，$\vec{x}_3 = \vec{x}_2 - (\vec{F}(\vec{x}_2) - \vec{y})$ とさらに補正してみる．

- 【ヤコビ行列が単位行列のときの逆写像定理の証明】。
$\vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}$, $\vec{x}_1 = \vec{0} - (\vec{F}(\vec{0}) - \vec{y})$ だから，$\vec{x}_0 = \vec{0}$ とおく．
$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{F}(\vec{x})$ とおくと，$\vec{H}$ のヤコビ行列 $D\vec{H}$ は，$\vec{0}$ において零行列であり，偏微分 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は U 上連続であるから，$\vec{H}$ の成分 h_i について，$\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}$ は 0 に近い．正実

数 ε を $\varepsilon \leqq \dfrac{1}{2n}$ ととる．すると正実数 δ で $\|\vec{x}\| \leqq \delta$ ならば $\left|\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}\right| \leqq \varepsilon$ となるものをとることができる．h_i の偏微分の評価から $\vec{H}$ のリプシッツ定数の評価が得られる．

$$(*) \qquad\qquad \|\vec{H}(\vec{x}+\vec{v}) - \vec{H}(\vec{x})\| \leqq \varepsilon n \|\vec{v}\|$$

さて，$\vec{y}$ が，$\|\vec{y}\| \leqq \dfrac{\delta}{2}$ を満たすとする．

$$\vec{x}_0 = 0, \quad \vec{x}_1 = \vec{y}, \quad \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - (F(\vec{x}_k) - \vec{y}) \quad (k \geqq 2)$$

をとる．$\vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}$ について，$\|\vec{x}_{k-1}\| \leqq \delta$, $\|\vec{x}_k\| \leqq \delta$ ならば，

$$\begin{aligned}\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| &= \|\vec{x}_k - (\vec{F}(\vec{x}_k) - \vec{y}) - \vec{x}_{k-1} + (\vec{F}(\vec{x}_{k-1}) - \vec{y})\| \\ &= \|\vec{x}_k - \vec{F}(\vec{x}_k) - \vec{x}_{k-1} + \vec{F}(\vec{x}_{k-1})\| = \|\vec{H}(\vec{x}_k) - \vec{H}(\vec{x}_{k-1})\| \\ &\leqq \varepsilon n \|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leqq \frac{1}{2}\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\|\end{aligned}$$

最後の不等式は $\varepsilon \leqq \dfrac{1}{2n}$ としたからである．これにより，

$$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| \leqq \frac{1}{2^k}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = \frac{1}{2^k}\|\vec{y}\|$$

がわかるので，

$$\|\vec{x}_{k+1}\| \leqq \sum_{\ell=0}^{k} \|\vec{x}_{\ell+1} - \vec{x}_\ell\| \leqq \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{2^\ell}\|\vec{y}\| < 2\|\vec{y}\| \leqq \delta$$

したがって，得られる $\vec{x}_{k+1}$ は $\|\vec{x}_{k+1}\| \leqq \delta$ を満たす．また，$\vec{H}$ のリプシッツ評価式 $(*)$ は順に成立していることもわかる．点列 $\vec{x}_k$ はコーシー列であり，$\vec{x}$ に収束する．収束先の $\vec{x}$ に対して，$\vec{x} = \vec{x} - (\vec{F}(\vec{x}) - \vec{y})$ であるから，$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{y}$ を満たす．

このような $\vec{x}$ で $\|\vec{x}\| \leqq \delta$ を満たすものは，一意に定まる．実際，$\vec{F}(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$, $\vec{F}(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$ とすると，

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{x}_1) - \vec{F}(\vec{x}_2) &= \vec{x}_1 + (\vec{F}(\vec{x}_1) - \vec{x}_1) - (\vec{x}_2 + (\vec{F}(\vec{x}_2) - \vec{x}_2)) \\ &= \vec{x}_1 - \vec{H}(\vec{x}_1) - (\vec{x}_2 - \vec{H}(\vec{x}_2))\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\|\vec{F}(\vec{x}_1) - \vec{F}(\vec{x}_2)\| &\geqq \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| - \|\vec{H}(\vec{x}_1) - \vec{H}(\vec{x}_2)\| \\ &\geqq \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| - \frac{1}{2}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \geqq \frac{1}{2}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|\end{aligned}$$

である．したがって，$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \leqq 2\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$ で，$\vec{x}$ は $\vec{y}$ により一意に定まる．$\vec{G}(\vec{y}) = \vec{x}$ とすると，$\vec{G}$ は $\|\vec{y}\| \leqq \dfrac{\delta}{2}$ で定義されており，リプシッツ連続である．

定義された $\vec{G}$ が，C^1 級であることは次のように示す．

$$\vec{F}(\vec{x}_2)-\vec{F}(\vec{x}_1)=(D\vec{F})_{(\vec{x}_1)}(\vec{x}_2-\vec{x}_1)+\vec{r}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\|\vec{x}_2-\vec{x}_1\|$$

$\lim\limits_{\vec{x}_2\to\vec{x}_1}\vec{r}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\vec{0}$ であるが，書き直すと，

$$\begin{aligned}&\vec{y}_2-\vec{y}_1\\&=(D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}_1))}(\vec{G}(\vec{y}_2)-\vec{G}(\vec{y}_1))+\vec{r}(\vec{G}(\vec{y}_1),\vec{G}(\vec{y}_2))\|\vec{G}(\vec{y}_2)-\vec{G}(\vec{y}_1)\|\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}&\vec{G}(\vec{y}_2)-\vec{G}(\vec{y}_1)\\&=((D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}_1))})^{-1}(\vec{y}_2-\vec{y}_1)-\vec{r}(\vec{G}(\vec{y}_1),\vec{G}(\vec{y}_2))\frac{\|\vec{G}(\vec{y}_2)-\vec{G}(\vec{y}_1)\|}{\|\vec{y}_2-\vec{y}_1\|}\|\vec{y}_2-\vec{y}_1\|\end{aligned}$$

である．もしも，$D\vec{F}=\mathbf{1}-D\vec{H}$ において $D\vec{H}$ の各成分の絶対値が $\dfrac{1}{2n}$ 以下であるとすると，$n\times n$ 行列 $(D\vec{H})^k$ の各成分の絶対値は $\dfrac{1}{2^k n}$ 以下である．よって，$n\times n$ 行列の無限和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(D\vec{H})^k$ は絶対収束し，$D\vec{F}^{-1}$ を与える．したがって，$\vec{G}(V)$ において $D\vec{F}$ は正則である．また，$\dfrac{\|\vec{G}(\vec{y}_2)-\vec{G}(\vec{y}_1)\|}{\|\vec{y}_2-\vec{y}_1\|}\leqq 2$ であるから，

$$\lim_{\vec{y}_2\to\vec{y}_1}\vec{r}(\vec{G}(\vec{y}_1),\vec{G}(\vec{y}_2))\frac{\|\vec{G}(\vec{y}_2)-\vec{G}(\vec{y}_1)\|}{\|\vec{y}_2-\vec{y}_1\|}=0$$

となり，$\vec{G}(\vec{y})$ は全微分可能である．全微分は，$(D\vec{F}_{(\vec{G}(\vec{y}))})^{-1}$ で，$\vec{y}$ に対して連続である．以上より，$\vec{G}$ は C^1 級である．

さて，$(D\vec{F}_{(\vec{G}(\vec{y}))})^{-1}$ は，

$$\begin{array}{ccccccc}V & \xrightarrow{\vec{G}} & U & \xrightarrow{D\vec{F}} & GL(n;\boldsymbol{R}) & \xrightarrow{\cdot^{-1}} & GL(n;\boldsymbol{R})\\ \vec{y} & \longmapsto & \vec{G}(\vec{y}) & \longmapsto & (D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}))} & \longmapsto & ((D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}))})^{-1}\end{array}$$

を合成した写像である．ここで，仮定から $D\vec{F}$ は C^{r-1} 級写像，逆行列を対応させる写像 $\cdot^{-1}$ は C^{∞} 級写像である．$r\geqq 2$ とすると，$r-1\geqq 1$ であり，上に示した $\vec{G}$ が C^1 級であることから，$(D\vec{G})_{(\vec{y})}=((D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}))})^{-1}$ は C^1 級となり，$\vec{G}$ は C^2 級となる．同様に，G が C^s 級であることが示されると，$s\leqq r-1$ のとき，$(D\vec{G})_{(\vec{y})}=((D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}))})^{-1}$ は C^s 級となり，G は C^{s+1} 級であることがわかる．したがって G は C^r 級である．

2.5 座標変換

- 逆写像定理は一般化された座標変換である。
- 座標変換するメリットは、良い座標がとれれば方程式が簡単になることであろう。ここでいう方程式は、代数方程式、常微分方程式、偏微分方程式である。
- 【例】　２次の多項式については、直交行列を用いた座標変換で２次同次成分を対角化することができる。さらに、アフィン変換によれば、２次同次成分は $\sum \pm x_i^2$ のようにできる。
- 【例】　ベクトル場は、$\vec{0}$ の値を持つ点の近傍では難しいことがあるが、$\vec{0}$ にならない点の近傍では、常微分方程式の解の初期値に対する微分可能性の定理と逆写像定理により、ベクトル場が一定のベクトル $\vec{c}$ となる局所的な座標が存在する。その座標では、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{c}$ のようになり、軌道は一定のベクトル $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + t\vec{c}$ となる。フローボックス定理と呼ばれる。
- 【例】　ベクトル場 $\vec{v} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が線型とは、$\vec{v}(\vec{x}) = A\vec{x}$ となる行列 A が存在することである。線型のベクトル場の与える常微分方程式の解は、$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}^0$ のように与えられる。$e^{At} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$ を計算するためには、A を（複素数の範囲で）対角化する、あるいはジョルダン標準形にする座標をとり、座標変換する。
- 【例】　$\boldsymbol{R}^n$ 上のベクトル場 $\vec{v}$ に対し、$\vec{v}$ の各成分を点 $\vec{0}$ のまわりでテーラー展開して、

$$v_i(\vec{x} + \vec{w}) = a_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)} w_j + \sum_{j_1, j_2=1}^{m} a_{j_1 j_2}^{(i)} w_{j_1} w_{j_2} + \cdots$$

のように書くことはできる。$\vec{v}(\vec{0}) \neq \vec{0}$ のときは、フローボックス定理により局所的には簡単な形である。$\vec{v}(\vec{0}) = \vec{0}$ のとき、$A = (a_j^{(i)})$ という行列について、$A\vec{x}$ という線型ベクトル場に座標変換で書き換えることができるかどうかは、ポアンカレ、ジーゲルたちにより研究された。書き換えられるときも、そうでないときもある。現在でも研究されている問題である。複素力学系の問題にも現れる。

- $\boldsymbol{R}^n$ 上のベクトル場 $\vec{v}_{(\vec{x})}$ が与えられると、$\boldsymbol{R}^n$ 上の関数 $f(\vec{x})$ の各点におけるベクトル場 $\vec{v}_{(\vec{x})}$ の方向の微分を計算することができる。（これにはベクトル場が生成するフローに沿う微分という意味がある。）

$$\left(\frac{\mathrm{d}f(\vec{x} + t\vec{v}_{(\vec{x})})}{\mathrm{d}t}\right)_{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_{(\vec{x})} v_k(\vec{x}) = (Df)_{(\vec{x})} \vec{v}_{(\vec{x})}$$

これを $\vec{v}(f)$ と書くことがある。$\vec{v} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ のように書くと f を $\vec{v}$ の方向に微分することを表すことができる。つまり、$\vec{v}(f) = (\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial x_k})f = (\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}).$

ベクトル場は１階の偏微分作用素と同じものである。$\vec{v}(fg) = \vec{v}(f) \cdot g + f \cdot \vec{v}(g)$ が（各点 $\vec{x}$ で）成立している。

- $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, V に対し、局所的微分同相写像 $\vec{F} : U \longrightarrow V$ があるとする。U 上のベクトル場 $\vec{v}(\vec{x})$ に対し、V 上のベクトル場 $\vec{F}_* \vec{v}$ が次のように対応する。
  $\vec{v}(\vec{x})$ は、$\vec{x} + t\vec{v}(\vec{x})$ の速度ベクトルである。$\vec{F}(\vec{x} + t\vec{v}(\vec{x}))$ の速度ベクトル
  $$(\frac{\mathrm{d}\vec{F}(\vec{x} + t\vec{v}(\vec{x}))}{\mathrm{d}t})_{(0)} = (\sum_{j=1}^{k}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{(\vec{x})} v_j(\vec{x}))_{j=1,\dots,n} = (D\vec{F})_{(\vec{x})}\vec{v}_{(\vec{x})} \ .$$
  V 上の関数 g に対し、
  $$\vec{v}(g \circ \vec{F}) = \sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial g}{\partial y_i})_{(\vec{F}(\vec{x}))}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{(\vec{x})} v_j(\vec{x})$$
  だから、$F_*\vec{v} = \sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{(\vec{x})} v_j(\vec{x})\frac{\partial}{\partial y_i}$.
  これらは同じベクトル場である。V 上のベクトル場であるから、V の座標で書き表すと、$\vec{F}$ の逆写像を $\vec{G}$ として、$(D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}))}\vec{v}_{(\vec{G}(\vec{y}))} \sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{(\vec{G}(\vec{y}))} v_j(\vec{G}(\vec{x}))\frac{\partial}{\partial y_i}$ のように計算しなければならない。

2.6 微分作用素

- f に作用する微分 $\mathcal{D}$ は、線形写像 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ で
  $$(\mathcal{D}(fg))(x) = (\mathcal{D}f)(x)g(x) + f(x)(\mathcal{D}g)(x)$$
  を満たすものとして定義する。定数 1 に対しては、$\mathcal{D}(1) = 0$ となる。$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i h_i(x)$ に対し、$(\mathcal{D}f)(0) = \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{D}x_i)h_i(0)$ となり、$h_i(0) = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(0)}$ だから、$(\mathcal{D}f)$ は偏微分の 1 次結合となる。$\mathcal{D}f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

- 正則線形写像 A に対し、$(\mathcal{D}(f \circ A))(\vec{0}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_i (\frac{\partial f}{\partial x_k})_{(\vec{0})} A_{ki}$ であり、
  $$A_*\mathcal{D} = A_* \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ki} a_i \frac{\partial}{\partial x_k}$$
  となる。$A_*\mathcal{D} = \mathcal{D}$ は $A\vec{a} = \vec{a}$ のときだけである。

- 定数係数 2 階同次線型微分作用素は $\mathcal{B} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ と書かれる。正則線形写像 A に対し、
  $$(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ A))(\vec{0}) = (\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,\ell=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell} A_{ki} A_{\ell j})(\vec{0})$$

$A_*\mathcal{B} = AB^tA$ となる。$B = AB^tA$ となるのは、A が B が定義する内積を保つときである。特に $B = I$ のとき、直交行列で B が不変になる。すなわち、ラプラシアン $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ は、直交変換で不変である。一般に B は対称行列で、直交行列で対角化され、さらに A を取り直せば、$\pm 1, 0$ が対角線に並ぶ形になる。

- ラプラシアンは、座標方向に対する 2 階微分の和であるから、1 点から見て各方向の平均値の平均値とその点の値の差を与える。これが、直交変換で不変ということは、1 点の周りの球面あるいは球体上の平均値とその点の値との差を与えている。

- 【例】　極座標　$\overrightarrow{p} : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ で定義すると、$D\overrightarrow{p} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & -y \\ \dfrac{y}{r} & x \end{pmatrix}$ であり、$\det(D\overrightarrow{p}) = r$ だから、$r \neq 0$ においては、局所的な逆写像がある。$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ だから、$x > 0$ から $r > 0$, $\theta \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ への逆写像は $\overrightarrow{q}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan^{-1}(\dfrac{y}{x}) \end{pmatrix}$.
$D\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$. ここでは、必要に応じて $r^2 = x^2 + y^2$ が代入されていると読む。
$f(x,y)$ を (r,θ) で表すためには、$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考えればよい。$f(x,y)$ の動径方向の変化、回転方向の変化を見るためには、$\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を計算する必要がある。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

これを、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

のように書く。
$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を (r,θ) で表すのは落ち着いて考える必要がある。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

これらを

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

と書くと見通しが良い。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= (\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&\quad + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= (\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&\quad + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を計算すると、

$$
\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}
$$

となる。このように簡単になるのは、r 一定の円周と θ 一定の直線が直交しているからである。

念のために、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} &= (\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) \\
&= \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&\quad - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \cos\theta\sin\theta(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}) \\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} &= (\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}) \\
&= \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&\quad - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \cos\theta\sin\theta(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta})
\end{aligned}
$$

- 【例】　円柱座標。円柱座標は、(r, θ, z) と表される。平面の極座標の変換を注意深く行えば、必要な微分は求められる。
- 【例】　$\vec{F}\begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos\theta \\ e^t\sin\theta \end{pmatrix}$ とすると、ヤコビ行列は $\begin{pmatrix} e^t\cos\theta & -e^t\sin\theta \\ e^t\sin\theta & e^t\cos\theta \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 像に $\vec{0}$ は含まれない。これは計算しやすい。

- 【例】　**球面座標**。単位球面の 1 点 (x,y,z) を (x,y) と $(1,0)$ の角度および $(1,0,0)$ と (x,y,z) の角度で表す。数学では前者を θ, 後者を φ と書くことが多く、xy 平面の極座標の拡張となっている。物理では、前者を φ, 後者を θ と書くことが多いようである。私は、xy 平面の θ と仰角を使うのがより直観にあうと思っているが、ISO で、$(1,0,0)$ と (x,y,z) の角度を θ、(x,y) と $(1,0)$ の角度を φ として、(ρ,θ,φ) で表すとしているというので、これで説明する。
  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ のヤコビ行列は $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$
  である。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

- 注意。3 次元の球面だったらどのような選択が妥当だろうか？
  $\|\vec{v}\| = 1$ に対し、$\vec{e}_1 \bullet \vec{v} = \cos\varphi_1,\ \vec{e}_2 \bullet \dfrac{\vec{v} - (\vec{e}_1 \bullet \vec{v})\vec{e}_1}{\|\vec{v} - (\vec{e}_1 \bullet \vec{v})\vec{e}_1\|} = \cos\varphi_2, \ldots$　として、
  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 \end{pmatrix}$ というものが考えられる。3 次元の取り方は zxy の順にこれを行っているとみることができる。

- (x,y,z) から (r,θ,φ) は次で定まる。$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2})\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{r\sin\theta\cos\varphi\ r\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(\frac{1}{x})\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{r\sin\theta\sin\varphi\, r\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
&= \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= (\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi})(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}) \\
&\quad +(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi})(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}) \\
&\quad +(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})
\end{aligned}
$$

の計算。計算結果は、$\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}$, $\frac{\partial^2}{\partial r\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2}{\partial \theta\partial \varphi}$ に関数をかけたものの和である。

$\frac{\partial}{\partial r}$ の係数は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\cos\varphi) + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\sin\varphi) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\cos\theta \\
&-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\theta\cos\varphi) + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\theta\sin\varphi) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial}{\partial \theta}$ の係数は、

$$
\begin{aligned}
&\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}) + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}) - \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sin\theta}{r} \\
&+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}) + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}) + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \\
&-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}) + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}) \\
=& -\frac{0}{r^2} + \frac{0}{r^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial}{\partial \varphi}$ の係数は、

$$
\begin{aligned}
&-\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}) + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}) \\
&-\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}) + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}) \\
&+\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}) + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}) \\
=& -\frac{0}{r^2\sin\theta} + \frac{0}{r^2\sin\theta} + \frac{0}{r^2\sin^2\theta} = 0
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$ の係数は、

$$(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ の係数は、

$$(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r})^2 + (\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r})^2 + (\frac{\sin\theta}{r})^2 = \frac{1}{r^2}$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ の係数は、

$$(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta})^2 + (\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})^2 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}$ の係数は、

$$2\sin\theta\cos\varphi\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} + 2\sin\theta\sin\varphi\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} - 2\cos\theta\frac{\sin\theta}{r} = 0$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}$ の係数は、

$$-2\sin\theta\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} + 2\sin\theta\sin\varphi\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} = 0$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial \theta\partial\varphi}$ の係数は、

$$-2\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} + 2\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} = 0$$

従って、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ =& \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

- $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x})$, $\vec{x} = \vec{G}(\vec{y})$ のとき、曲線 $\vec{x}(t)$ の像の曲線 $\vec{y}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$ の速度ベクトルは、$(\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t})_{(t)} = (D\vec{F})_{(\vec{x}(t))}(\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t})_{(t)}$ である。$\vec{y}$ の関数 $f(\vec{y})$ に対し、曲線 $\vec{y}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$ に沿う微分は、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(\vec{F}(\vec{x}(t)))}{\mathrm{d}t} &= (Df)_{(\vec{F}(\vec{x}(t)))}(D\vec{F})_{(\vec{x}(t))}(\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t})_{(t)}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\end{pmatrix}_{(\vec{F}(\vec{x}(t)))}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{(\vec{x}(t))}\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}_{(t)}\end{aligned}$$

  実際に扱う問題では、$\vec{x}$ は、ユークリッド空間の座標系で、$\vec{y}$ は極座標の成分からなるベクトルのような場合が重要である。問題の対称性から、$f(\vec{y})$ の形の関数を考えているが、実施に計算したいのは、ユークリッド空間の座標 $\vec{x}$ についての、微分であり、それを $\vec{y}$ で表したいというようなことである。
  これはすなわち、$\vec{x}(t)$ が座標軸方向の単位速度の運動であり、

$$(\frac{\mathrm{d}f(\vec{F}(\vec{x}+t\vec{e}_k))}{\mathrm{d}t})_{(0)} = (Df)_{(\vec{F}(\vec{x}))}(D\vec{F})_{(\vec{x})}\vec{e}_k = (Df)_{(\vec{y})}(D\vec{F})_{(\vec{G}(\vec{y}))}\vec{e}_k$$

  これを

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

と表す。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$$

となる。特に、$k = \ell$ として k について和をとると、ラプラシアンが得られるが、$\displaystyle\sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ は、y_i 座標軸方向と、y_j 座標軸方向の内積であり、これらが直交していれば、$i \neq j$ については 0 となる。すなわち、$(y_1, \ldots, y_n)$ が直交座標系であれば、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial y_i}{\partial x_k})^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$

極座標のとき $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan^{-1} \dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$ から、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \frac{xz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} & \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \\ \frac{z(-x^2+y^2+z^2)}{r^4\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{zx^2}{r^2(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{z(x^2-y^2+z^2)}{r^4\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{zy^2}{r^2(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

従って、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

これから、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi})(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi})\\
&+(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi})(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi})\\
&+(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta})(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta})
\end{aligned}
$$

2.7 時刻に依存する座標系

- 【例】 時刻とともに移動する座標系。$\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$ とする。逆変換は $\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ である。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\\
\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
$$

$\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ 座標で静止していることは $\dfrac{\partial}{\partial s}$ で表されるが、$\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$ 座標では $-\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial t}$ に写される。

- 【例】 （ばねにより）単振動する座標系。微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v,\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -x$ は、$x = \cos s$ という解を持つ。平面上のベクトル場としてあらわすと、$v\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial v}$ である。

$x = \cos s + y$ とすると、$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \sin s$. $s = t$ として $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = w$ とすると、$\begin{pmatrix} x \\ v \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+\cos t \\ w-\sin t \\ t \end{pmatrix}$ である。逆変換は $\begin{pmatrix} y \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\cos s \\ v+\sin s \\ t \end{pmatrix}$ である。

$$
\begin{aligned}
&v\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial v}\\
&= (w-\sin t)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - (y+\cos t)\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\\
&= (w-\sin t)\frac{\partial}{\partial y} - (y+\cos t)\frac{\partial}{\partial w}
\end{aligned}
$$

では、$w = y = 0$ が解にならない。時刻に依存する座標変換では、ベクトル場は、$\begin{pmatrix} x \\ v \\ s \end{pmatrix}$ 空間内のベクトル場 $v\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial v} + \dfrac{\partial}{\partial s}$ と考えなければならない。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial t}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\\
&= \sin s\frac{\partial}{\partial y} + \cos s\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
$$

$v\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial v} + \dfrac{\partial}{\partial s} = w\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial w} + \dfrac{\partial}{\partial t}$ となる。

- 【例】 回転座標系。$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}$, ポテンシャル $U(\vec{x})$ により、運動方程式が、

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}=\vec{u},\quad \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}s}=-\mathrm{grad}(U)=-\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_1}\\\frac{\partial U}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

であるとする。これはベクトル場としては、

$$\vec{v}=u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial u_1}-\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\frac{\partial}{\partial s}$$

である。

$$\begin{aligned}\vec{x}^1(s)&=-\mu R_s\vec{e}_1\\\vec{x}^2(s)&=(1-\mu)R_s\vec{e}_1\\U&=-\frac{1-\mu}{\|\vec{x}-\vec{x}^1(s)\|}-\frac{\mu}{\|\vec{x}-\vec{x}^2(s)\|}\end{aligned}$$

とする。$s=t$, $\vec{x}=R_t\vec{y}$, $\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}=\vec{w}$ として、

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=JR_t\vec{y}+R_t\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}=JR_t\vec{y}+R_t\vec{w}\\\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}&=J^2R_t\vec{y}+2JR_t\vec{w}+R_t\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}=-R_t\vec{y}+2JR_t\vec{w}+R_t\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}&=\vec{y}-2J\vec{w}-R_{-t}\mathrm{grad}_{\vec{x}}(U)\\&=\vec{y}-2J\vec{w}-\mathrm{grad}_{\vec{y}}(U)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}_{\vec{y}}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y_1}\\\frac{\partial}{\partial y_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\\\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix}=R_{-t}\mathrm{grad}_{\vec{x}}\end{aligned}$$

従って対応するベクトル場は

$$\vec{v}=w_1\frac{\partial}{\partial y_1}+w_2\frac{\partial}{\partial y_2}+(y_1-\frac{\partial U}{\partial y_1}+2w_2)\frac{\partial}{\partial w_1}+(y_2-\frac{\partial U}{\partial y_2}-2w_1)\frac{\partial}{\partial w_2}$$

となる。ベクトル場の変換は以下のように計算される。

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\u_1\\u_2\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0&0&0\\\sin t&\cos t&0&0&0\\-\sin t&-\cos t&\cos t&-\sin t&0\\\cos t&-\sin t&\sin t&\cos t&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\w_1\\w_2\\t\end{pmatrix}$$

により対応している。逆に、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 & 0 & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 & 0 & 0 \\ -\sin s & \cos s & \cos s & \sin s & 0 \\ -\cos s & -\sin s & -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{v} \\
&= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial s} \\
&= (-y_1 \sin t - y_2 \cos t + w_1 \cos t - w_2 \sin t)(\cos s \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin s \frac{\partial}{\partial y_2} - \sin s \frac{\partial}{\partial w_1} - \cos s \frac{\partial}{\partial w_2}) \\
&\quad + (y_1 \cos t - y_2 \sin t + w_1 \sin t + w_2 \cos t)(\sin s \frac{\partial}{\partial y_1} + \cos s \frac{\partial}{\partial y_2} + \cos s \frac{\partial}{\partial w_1} - \sin s \frac{\partial}{\partial w_2}) \\
&\quad - \frac{\partial U}{\partial x_1}(\cos s \frac{\partial}{\partial w_1} - \sin s \frac{\partial}{\partial w_2}) - \frac{\partial U}{\partial x_2}(\sin s \frac{\partial}{\partial w_1} + \cos s \frac{\partial}{\partial w_2}) \\
&\quad + (-x_1 \sin s + x_2 \cos s) \frac{\partial}{\partial y_1} + (-x_1 \cos s - x_2 \sin s) \frac{\partial}{\partial y_2} \\
&\quad + (-x_1 \cos s - x_2 \sin s - u_1 \sin s + u_2 \cos s) \frac{\partial}{\partial w_1} \\
&\quad + (x_1 \sin s - x_2 \cos s - u_1 \cos s - u_2 \sin s) \frac{\partial}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial t} \\
&= (-y_2 + w_1) \frac{\partial}{\partial y_1} + (y_1 + w_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \\
&\quad + (y_1 + w_2 - \frac{\partial U}{\partial x_1} \cos t - \frac{\partial U}{\partial x_2} \sin t) \frac{\partial}{\partial w_1} \\
&\quad + (y_2 - w_1 - \frac{\partial U}{\partial x_1}(-\sin t) - \frac{\partial U}{\partial x_2} \cos t) \frac{\partial}{\partial w_2} \\
&\quad + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial}{\partial w_1} - w_1 \frac{\partial}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial t} \\
&= w_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + (y_1 + 2w_2 - \frac{\partial U}{\partial y_1}) \frac{\partial}{\partial w_1} + (y_2 - 2w_1 - \frac{\partial U}{\partial y_2}) \frac{\partial}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{grad}_{\vec{y}}(U) = (\frac{\partial x_j}{\partial y_k})\mathrm{grad}_{\vec{x}}(U)$, すなわち、$\frac{\partial U}{\partial y_1} = \cos t \frac{\partial U}{\partial x_1} + \sin t \frac{\partial U}{\partial x_2}$, $\frac{\partial U}{\partial y_2} = -\sin t \frac{\partial U}{\partial x_1} + \cos t \frac{\partial U}{\partial x_2}$ を用いた。